www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

CONCOURS 1989 **OPTIONS M et P'** DURÉE : 2 heures

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

I

Dans cette partie, on se propose de montrer que tout nombre réel de l'intervalle $[0, 2[$ a un développement binaire.

a. Soit a un réel de l'intervalle $[0, 2[$ et les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$a_n = \frac{E(2^n a)}{2^n} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{E(2^n a + 1)}{2^n},$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Montrer que les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers a.

b. On considère, pour tout réel a de l'intervalle $[0, 2[$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie précédemment. Montrer qu'il existe une suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unique telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = d_0 + \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{4} + \cdots + \frac{d_n}{2^n},$$

où d_i est un élément de $\mathbb{N}$ égal à 0 ou à 1. On notera désormais :

$$a = \sum_{K=0}^{+\infty} \frac{d_K}{2^K} = d_0, d_1 d_2 \ldots d_n \ldots$$

On dira que $d_0, d_1 d_2 \ldots d_n \ldots$ est le développement binaire de a et $d_0, d_1 d_2 \ldots d_n$ l'approximation binaire d'ordre n de a.

II

a. Soit v un réel de l'intervalle $]-1, +1[$; on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} v_{n+1} = 2v_n^2 - 1 \\ v_0 = v. \end{cases}$$

Montrer que v_n est un polynôme en v dont on déterminera le degré et le coefficient dominant.

b. Soit v un réel de l'intervalle $]-1, +1[$; on pose : $\varphi = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arc\,cos} v$

On note $d_0, d_1 d_2 \ldots d_n$ l'approximation binaire d'ordre n de φ et $d_0, d_1 d_2 \ldots d_n d_{n+1}$ celle d'ordre $n+1$. Après avoir déterminé v_0, exprimer v_n à l'aide de φ, n, de π et d'une fonction trigonométrique simple.

Montrer qu'il existe un entier k et un réel h de l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ tels que :

$$2^n \varphi = 2k + d_n + \frac{d_{n+1}}{2} + h.$$

c. Montrer que l'approximation binaire d'ordre n de φ peut être déterminée par récurrence. On montrera, à cet effet, que si $v_{n+1} = 0$, alors $d_{n+1} = 1$ et l'écriture binaire s'arrête à ce rang ; sinon la connaissance du signe de v_{n+1} et de d_n permet de déterminer d_{n+1}.

d. On utilisera dans cette question, les variables Y, s, A, D et I. Lorsque la variable I aura la valeur p, la variable Y sera affectée de la valeur v_{p+1}, s de la valeur $\frac{1}{2^p}$, D de la valeur d_p, et A de la valeur :

$$d_0 + \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{4} + \cdots + \frac{d_p}{2^p}.$$

En utilisant les variables précédentes, décrire l'algorithme du II.*c.* permettant de déterminer φ à l'aide de son développement binaire. L'algorithme demandé est un algorithme mathématique pouvant « boucler indéfiniment ».

III

La partie III étudie quelques propriétés de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a. On dira que φ admet un développement binaire périodique si et seulement si il existe un entier k et un entier non nul p tels que pour tout n supérieur ou égal à k, $d_{n+p} = d_n$.

Exprimer, dans le cas où φ admet un développement binaire périodique, φ comme somme d'une série où interviennent :

$$\varphi_0 = \sum_{i=0}^{i=k} \frac{d_i}{2^i} \quad \text{et} \quad \varphi_1 = \sum_{i=1}^{p} \frac{d_{k+i}}{2^{i-1}}.$$

En comparant v_{k+i+2} et $v_{k+p+i+2}$ pour tout i compris entre 1 et p, montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang. Préciser les valeurs de v_{k+i+2} à l'aide de φ_1 de i et de p pour i élément de l'intervalle $[1, p]$.

b. Montrer que si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite périodique à partir d'un certain rang, alors le développement binaire de φ est périodique. On pourra comparer d_k et d_{k+p} ou encore d_{k+p} et d_{k+2p}, où $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ désigne toujours la suite définie au I.*b.*, permettant d'obtenir l'approximation binaire de φ.

Comment choisir φ pour que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit périodique ?

c. Déterminer les valeurs l vers lesquelles les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée de v_0 peuvent converger.

Montrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n n'est pas dans l'ensemble $\left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$ alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas être convergente.

En déduire les choix de φ pour lesquels $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

page 186 ECOLE SUPERIEURE d'INGENIEURS de MARSEILLE
1989 1 Mathématiques appliquées

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail